الوحدة الأولى
الإشتقاق وتطبيقاته

١ - ١ إشتقاق الدوال المثلثية

مراجعة على ماسبق:

تذكر أن: إذا كانت ص = د(س) فإن:

✱ دالة التغير:

$$ت(هـ) = د(س_١ + هـ) - د(س_١)$$

حيث هـ التغير فى س

✱ دالة متوسط التغير:

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

تستخدم هذه الصورة لإيجاد دالة متوسط التغير

أو

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

تستخدم هذه الصورة لحساب قيمة متوسط التغير

✱ دالة معدل التغير:

بأخذ نهاية دالة متوسط التغير عندما هـ ← ٠ نحصل على دالة معدل التغير أى أن:

$$\text{دالة معدل التغير} = \lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

✱ المعنى الهندسى لمعدل التغير:

اولا: معدل التغير عند نقطة يمثل هندسيا ميل المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة

ومعلوم أن ميل المماس للمنحنى هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\text{معدل التغير} = \text{ميل المماس للمنحنى عند } س_١ = \text{ظال} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

حيث ل هى الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ثانيا: إذا كانت ص = د(س) فإن معدل التغير يكون ايضا دالة فى س ولذلك يسمى معدل التغير بالدالة المشتقة أو المشتقة الأولى أو المعامل التفاضلى الأول

ويرمز لها بإحد الرموز الآتية: $د'(س)$ أو $ص'$ أو $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ء}{ءس}$ { د(س) }

معدل التغير = المشتقة الأولى للدالة = $\frac{ءص}{ءس} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

من أولا وثانيا نجد أن:

معدل التغير = ميل المماس = المشتقة الأولى للدالة = ظل زاوية المماس مع محور السينات الموجب

معدل التغير = ميل المماس = ظاθ = $\frac{ءص}{ءس} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

✱ قابلية الدالة للإشتقاق عند نقطة:

يقال أن الدالة د قابلة للإشتقاق عند $س = أ$ (حيث أ تنتمى لمجال الدالة)

إذا وفقط إذا كانت $د'(أ)$ لها وجود حيث $د'(أ) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

وإذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقط الفترة] جـ، ء [نقول أن الدالة د قابلة للإشتقاق فى هذه الفترة

ولذلك فإن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للإشتقاق على ح

✱ المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى:

إذا كانت الدالة د معرفة عند $س = أ$ (حيث أ تنتمى لمجال الدالة)،وكانت قاعدة الدالة على يمين أ تختلف عن قاعدتها على يسار أ فلبحث قابلية الإشتقاق عند $س = أ$ نتبع الآتى:

- نوجد المشتقة اليمنى ورمزها $د'(أ^+)$ حيث $د'(أ^+) = \underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$
- نوجد المشتقة اليسرى ورمزها $د'(أ^-)$ حيث $د'(أ^-) = \underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نهـا} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

وتكون الدالة د قابلة للإشتقاق عند $س = أ$ إذا وفقط إذا كان $د'(أ^+) = د'(أ^-)$

ويرمز لمشتقة الدالة بالرمز $د'(أ)$

✱ الإشتقاق والإتصال:

✱ نظرية:

إذا كانت $ص = د(س)$ قابلة للإشتقاق عند النقطة $س = أ$ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

أي أنه اذا كانت $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س=أ}$ لها وجود ⇐ الدالة متصلة عند $س = أ$

ملاحظات هامة جدا:

١) عكس النظرية السابقة غير صحيح دائما
اي انه إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس شرطا أن تكون قابلة للإشتقاق عند هذه النقطة

٢) اذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فإنها تكون غير قابلة للإشتقاق عند هذه النقطة

٣) عند بحث قابلية الاشتقاق عند نقطة فى مجالها يفضل بحث إتصالها عند هذه النقطة أولا فإن كانت متصلة نبحث الإشتقاق وإن كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للإشتقاق

✱ قواعد الإشتقاق

١ – مشتقة الدالة الثابتة:

إذا كان $\text{ص} = \text{جـ} \quad : \quad \text{جـ} \in \text{ح}$ فإن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$

اى أن: **المشتقة الأولى للمقدار الثابت تساوى صفر**

٢ – مشتقة الدالة $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{ن}}$:

➢ إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}} \quad : \quad \text{ن} \in \text{ح}$ فإن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ن س}^{\text{ن}-١}$

اى انه لايجاد المشتقة الأولى للمتغير س مرفوع لأس معين: ننزل الاس وننقص من الاس واحد

➢ إذا كان $\text{ص} = \text{س}$ فإن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ١$

➢ إذا كان $\text{ص} = \text{أ س}^{\text{ن}} \quad : \quad \text{أ، ن} \in \text{ح}$ فإن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{أ ن س}^{\text{ن}-١}$

أى أن المشتقة الأولى لمقدار ثابت × دالة تساوى الثابت × مشتقة الدالة

٣ – مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما:

إذا كان $\text{د(س)} = \text{ر(س)} \pm \text{ع(س)} \pm \text{هـ(س)} \pm \dots$

فإن $\text{د}'\text{(س)} = \text{ر}'\text{(س)} \pm \text{ع}'\text{(س)} \pm \text{هـ}'\text{(س)} \pm \dots$

اى أن

المشتقة الأولى لمجموع جبرى لعدد من الدوال تساوى المجموع الجبرى لمشتقات الدوال

٤ – مشتقة حاصل ضرب دالتين:

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

نتيجة:

مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال

= مشتقة الأولى×الثانية×الثالثة + مشتقة الثانية×الأولى×الثالثة+ مشتقة الثالثة×الأولى×الثانية

٥ – مشتقة خارج قسمة دالتين:

$$\text{مشتقة خارج قسمة دالتين} = \frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

٦ – مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة):

إذا كانت ص = د(ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع وكانت ع = ر(س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن: ص = د(ر(س)) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ويكون:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

وتعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة

وبصورة اخرى

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{د}\left[\text{ر(س)}\right] = \text{د}'\left[\text{ر(س)}\right] \times \text{ر}'\text{(س)}$$

٧ – مشتقة الدالة $[\text{د(س)}]^{\text{ن}}$:

إذا كانت ص = $[\text{د(س)}]^{\text{ن}}$ حيث د قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى فإن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\left[\text{د(س)}\right]^{\text{ن}-1} \times \text{د}'\text{(س)}$$

اى انه لايجاد المشتقة الأولى لقوس مرفوع لأس معين:

ننزل الاس أمام القوس وننقص من أس القوس واحد ونضرب فى مشتقة مابداخل القوس

نتيجة :

إذا كانت ص دالة فى س وقابلة للإشتقاق فإن:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

اى انه لايجاد المشتقة الأولى لـ ص مرفوع لأس معين:

ننزل الاس وننقص من الأس واحد ونضرب فى مشتقة ص بالنسبة إلى س

مشتقات الدوال المثلثية

سبق أن درسنا مشتقة بعض الدوال المثلثية وعلمنا أنه:

١) **إذا كان:** ص = جاس **فإن:** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتاس

٢) **إذا كان:** ص = جتاس **فإن:** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − جاس

٣) **إذا كان:** ص = ظاس **فإن:** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{2}س

والآن باستخدام العلاقات بين الدوال المثلثية وقواعد الإشتقاق نوجد مشتقة مقلوبات الدوال المثلثية

✷ مشتقة دالة ظل التمام:

إذا كان: ص = ظتاس **فإن:** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا^{2}س

الإثبات:

∵ ص = ظتاس ، ∵ ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

∴ ص = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ **بالتفاضل كخارج قسمة دالتين**

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جاس}\times\text{جاس}-\text{جتاس}\times\text{جتاس}}{\text{جا}^{2}\text{س}} = \frac{-(\text{جا}^{2}\text{س}+\text{جتا}^{2}\text{س})}{\text{جا}^{2}\text{س}} = \frac{-1}{\text{جا}^{2}\text{س}} = -\text{قتا}^{2}\text{س}$

✷ مشتقة دالة القاطع:

إذا كان: ص = قاس **فإن:** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قاس ظاس

الإثبات:

∵ ص = قاس ، ∵ قاس = $\frac{1}{\text{جتاس}}$

∴ ص = $\frac{1}{\text{جتاس}}$ **بالتفاضل كخارج قسمة دالتين**

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{0\times\text{جتاس} - (-\text{جاس})\times 1}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = \frac{1}{\text{جتاس}}\times\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{قاس ظاس}$

✸ مشتقة دالة قاطع التمام:

إذا كان: ص = قتا س **فإن:** $\frac{ءص}{ءس}$ = − قتا س ظتا س

الإثبات:

∵ ص = قتا س ، ∵ قا س = $\frac{1}{\text{جا س}}$

∴ ص = $\frac{1}{\text{جا س}}$ **بالتفاضل كخارج قسمة دالتين**

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{٠ × جا س} - \text{جتا س} \times 1}{\text{جا}^2\text{س}}$ = $\frac{-\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س}}$ = $\frac{-1}{\text{جا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ = − قتا س ظتا س

✸ ملاحظات هامة:

١) إذا كان ص = جا[د(س)] فإن: $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا[د(س)] × د′(س)

أى أنه لإيجاد تفاضل الدالة المثلثية فإننا نفاضل الدالة المثلثية اولا ثم نضرب فى تفاضل الزاوية

فمثلا:

إذا كان ص = جا(٣س^2 − ٤) فإن: $\frac{ءص}{ءس}$ = [جتا(٣س^2 − ٤)] × ٦س

وبالمثل بالنسبة لباقى الدوال المثلثية

٢) **الدوال المثلثية التى بها حرف التاء تكون مشتقتها الأولى لها إشارة سالبة**

مثــــال:

اوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت ص تساوى:

(أ) ٢جا س − ٣ ظتا س (ب) جتا س + ٤ قا س (جـ) قا س ظا س

(د) قتا س ظتا س (هـ) $\frac{\text{قا س}}{\text{١ + قا س}}$ (و) $\frac{\text{١ − قتا س}}{\text{١ + قتا س}}$

الحــــل:

(أ) ص = ٢جا س − ٣ ظتا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × جتا س − ٣ × (− قتا^2 س) = ٢جتا س + ٣ قتا^2 س

(ب) ص = جتاس + ٤ قاس

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − جاس + ٤ × قاس ظاس = − جاس + ٤ قاس ظاس

(جـ) ص = قاس ظاس → **حاصل ضرب دالتين**

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قاس × قا^{٢}س + ظاس × قاس ظاس = قا^{٣}س + قاس ظا^{٢}س

(د) ص = قتاس ظتاس → **حاصل ضرب دالتين**

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قتاس × (− قتا^{٢}س) + ظتاس × (− قتاس ظتاس) = − قتا^{٣}س − قتاس ظتا^{٢}س

(هـ) ص = $\frac{\text{قاس}}{\text{١ + قاس}}$ → **خارج قسمة دالتين**

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{قاسظاس × (١ + قاس) − (٠ + قاسظاس) × قاس}}{\text{(١ + قاس)}^{٢}}$

= $\frac{\text{قاسظاس + قا}^{٢}\text{سظاس − قا}^{٢}\text{سظاس}}{\text{(١ + قاس)}^{٢}}$ = $\frac{\text{قاسظاس}}{\text{(١ + قاس)}^{٢}}$

(و) ص = $\frac{\text{١ − قتاس}}{\text{١ + قتاس}}$ → **خارج قسمة دالتين**

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(٠ + قتاسظتاس) × (١ + قتاس) − (٠ − قتاسظتاس) × (١ − قتاس)}}{\text{(١ + قتاس)}^{٢}}$

= $\frac{\text{قتاسظتاس + قتا}^{٢}\text{سظتاس + قتاسظتاس − قتا}^{٢}\text{سظتاس}}{\text{(١ + قتاس)}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢قتاسظتاس}}{\text{(١ + قتاس)}^{٢}}$

مثال:

اوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ **إذا كانت ص تساوى:**

(أ) ظتا(س^{٢} + ٣) (ب) قا$\sqrt{\text{س − ٢}}$ (جـ) جا(قتا٣س^{٢})

(د) ٣قا٢س + ٢ قتا٣س (هـ) − قتا^{٣} (٢س + π) (و) س^{٢} قا $\frac{١}{\text{س}}$

الحل:

(أ) ص = ظتا(س^{٢} + ٣)

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left[-\text{قتا}^{2}(\text{س}^{2}+٣)\right] \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{2}+٣) = -٢\text{س قتا}^{2}(\text{س}^{2}+٣)$$

(ب) $\text{ص} = \text{قا}\sqrt{\text{س}-٢}$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left(\text{قا}\sqrt{\text{س}-٢}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}-٢}\right) \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\sqrt{\text{س}-٢}\right)$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}-٢}}\left(\text{قا}\sqrt{\text{س}-٢}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}-٢}\right)$$

تذكر أن:

١) لإيجاد تفاضل الدالة المثلثية فإننا نفاضل الدالة المثلثية اولا ثم نضرب فى تفاضل الزاوية

٢) تفاضل الجذر التربيعى يساوى $\frac{١}{٢\sqrt{\ }} \times$ تفاضل ماتحت الجذر

٣) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) = \frac{-١}{\text{س}^{2}}$

(جـ) $\text{ص} = \text{جا}(\text{قتا}٣\text{س}^{2})$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left[\text{جتا}(\text{قتا}٣\text{س}^{2})\right] \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{قتا}٣\text{س}^{2})$$

$$= \left[\text{جتا}(\text{قتا}٣\text{س}^{2})\right] \times (-\text{قتا}٣\text{س}^{2}\ \text{ظتا}٣\text{س}^{2}) \times ٦\text{س}$$

$$= -٦\text{س جتا}(\text{قتا}٣\text{س}^{2})\ \text{قتا}٣\text{س}^{2}\ \text{ظتا}٣\text{س}^{2}$$

(د) $\text{ص} = ٣\text{قا}٢\text{س} + ٢\ \text{قتا}٣\text{س}$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(\text{قا}٢\text{س ظا}٢\text{س}) \times ٢ + ٢(-\text{قتا}٣\text{س ظتا}٣\text{س}) \times ٣$$

$$= ٦\ \text{قا}٢\text{س ظا}٢\text{س} - ٦\ \text{قتا}٣\text{س ظتا}٣\text{س}$$

(هـ) $\text{ص} = -\text{قتا}^{3}(٢\text{س}+\pi) = -\left[\text{قتا}(٢\text{س}+\pi)\right]^{3}$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣\left[\text{قتا}(٢\text{س}+\pi)\right]^{2} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left[\text{قتا}(٢\text{س}+\pi)\right]$$

$$= -٣\left[\text{قتا}^{2}(٢\text{س}+\pi)\right] \times \left[-\text{قتا}(٢\text{س}+\pi)\ \text{ظتا}(٢\text{س}+\pi)\right] \times ٢$$

$$= ٦\ \text{قتا}^{3}(٢\text{س}+\pi)\ \text{ظتا}(٢\text{س}+\pi)$$

(و) $\text{ص} = \text{س}^{2}\ \text{قا}\frac{١}{\text{س}}$ ← حاصل ضرب دالتين

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{2} \times \left(\text{قا}\frac{١}{\text{س}}\ \text{ظا}\frac{١}{\text{س}}\right) \times \frac{-١}{\text{س}^{2}} + \left(\text{قا}\frac{١}{\text{س}}\right) \times ٢\text{س}$$

$$= ٢\text{س قا}\frac{١}{\text{س}} - \text{قا}\frac{١}{\text{س}}\ \text{ظا}\frac{١}{\text{س}}$$

مثـــال:

إذا كان $ص = \sqrt{٥ - ٢ع}$ ، $ع = قا^٢ س$ فاثبت أن: $\sqrt{٣}\frac{ءص}{ءس} + ١٢ = ٠$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$

الحـــل:

$\because ص = \sqrt{٥ - ٢ع}$ ، $ع = قا^٢ س$ بالتعويض عن ع

$\therefore ص = \sqrt{٥ - ٢قا^٢ س}$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{٥ - ٢قا^٢ س}} \times \frac{ء}{ءس}(٥ - ٢قا^٢ س)$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٥ - ٢قا^٢ س}} \times (٠ - ٢قا^٢ س ظا ٢س) \times ٢ = \frac{-٢قا^٢ س ظا ٢س}{\sqrt{٥ - ٢قا^٢ س}}$$

عند $س = \frac{\pi}{٦} = ٣٠^\circ \leftarrow \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢قا^٢ ٦٠^\circ ظا ٦٠^\circ}{\sqrt{٥ - ٢قا^٢ ٦٠^\circ}} = \frac{-٢ \times ٢ \times \sqrt{٣}}{\sqrt{٥ - ٢ \times ٢}} = -٤\sqrt{٣}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \sqrt{٣}\frac{ءص}{ءس} + ١٢ = \sqrt{٣}(-٤\sqrt{٣}) + ١٢ = -١٢ + ١٢ = ٠ =$ الطرف الأيسر

ملاحظة: يمكن إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ بطريقة أخرى وذلك باستخدام قاعدة السلسلة

مثـــال:

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = ٢ظتا س + \sqrt{٢}قا س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

الحـــل:

$\because ص = ٢ظتا س + \sqrt{٢}قا س \Leftarrow \therefore \frac{ءص}{ءس} = -٢قتا^٢ س + \sqrt{٢}قا س ظا س$

عند $س = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow \therefore$ ميل المماس $= -٢قتا^٢\frac{\pi}{٤} + \sqrt{٢}قا\frac{\pi}{٤}ظا\frac{\pi}{٤} = -٤ + ٢ = -٢$

١ - ٢ الإشتقاق الضمنى والبارامترى

الإشتقاق الضمني

تنقسم الدوال الى نوعين هما:

- **الدوال الصريحة**: هي الدوال التي تكون علي الصورة ص = د(س)

وهذه الدوال يتم ايجاد مشتقتها الاولي بالنسبة للمتغير س وتطبيق قواعد الاشتقاق

فمثلا: $\text{ص} = ٤\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٣$ هي دالة صريحة

ويكون $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٥$

- **الدوال الضمنية**: هي الدوال التي تكون علي الصورة د(س ، ص) = ٠

وهذه الدوال يتم ايجاد مشتقتها الاولي بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير س وتطبيق قواعد الاشتقاق مع ملاحظة الآتى:

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{\text{ن}}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١} \quad ، \quad \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

اي انه عند تفاضل الـ س نفاضلها عادي اما عند تفاضل الـ ص نفاضلها عادي ونضرب في مشتقتها الاولي

فمثلا: $\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\text{ص} + \text{ص}^{٢} = ٠$ هى دالة ضمنية وبتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير س نـجد أن:

$$٢\text{س} + ٣\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ٣ + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$٣\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س} - ٣\text{ص} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(٣\text{س} + ٢\text{ص}) = -٢\text{س} - ٣\text{ص}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س} - ٣\text{ص}}{٣\text{س} + ٢\text{ص}}$$

لاحظ أن المشتقة الأولى للدالة الضمنية تكون دالة فى كلا من س ، ص وبالتالى يجب معرفة قيمتين متناظرتين لكل من س ، ص لحساب قيمة المشتقة الأولى أو ميل المماس أو إيجاد ظل الزاوية

مثـــال:

اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان:

(أ) $\text{س}^{٣} - ٥\text{س}\text{ص} + \text{ص}^{٣} = ٤\text{س}$ (ب) $\text{س}^{٢}\text{ص} + \text{ص}^{٢}\text{س} = ٢٥$

الحـــل:

(أ) $\text{س}^{٣} - ٥\text{س}\text{ص} + \text{ص}^{٣} = ٤\text{س}$ بتفاضل الطرفين بالنسبة الي س

$$\therefore \text{٣س}^{٢} - \left(\text{٥س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times \text{٥}\right) + \text{٣ص}^{٢} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤}$$

$$\therefore \text{٣س}^{٢} - \text{٥س} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{٥ص} + \text{٣ص}^{٢} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \left(-\text{٥س} + \text{٣ص}^{٢}\right) = -\text{٣س}^{٢} + \text{٥ص} + \text{٤}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٣س}^{٢} + \text{٥ص} + \text{٤}}{-\text{٥س} + \text{٣ص}^{٢}}$$

لإيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للدالة الضمنية:
١) نفاضل الطرفين بالنسبة الى س
٢) نضع الحدود التى بها $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فى طرف وباقى الحدود فى طرف
٣) نأخذ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عامل مشترك ثم نوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بقسمة الخارج على الداخل

(ب) $\text{س}^{٢}\text{ص} + \text{ص}^{٢}\text{س} = \text{٢٥}$ بتفاضل الطرفين بالنسبة الي س

$$\therefore \text{س}^{٢} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times \text{٢س} + \text{ص}^{٢} \times \text{١} + \text{س} \times \text{٢ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٠}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \left(\text{س}^{٢} + \text{٢س ص}\right) = -\text{٢س ص} - \text{ص}^{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٢س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{٢س ص}}$$

لاحظ أن أى رمزين
لايوجد بينهما + أو −
يكون تفاضلهما
بقاعدة حاصل ضرب
دالتين

مثـــال:

اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان:

(أ) س جتاص + ص جتاس = ١ (ب) ٣ص = جاس جتا٢ص

الحـــل:

(أ) س جتاص + ص جتاس = ١ بتفاضل الطرفين بالنسبة الي س

$$\therefore \text{س} \times \left(-\text{جاص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) + \text{جتاص} \times \text{١} + \text{ص} \times \left(-\text{جاس}\right) + \text{جتاس} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٠}$$

$$\therefore -\text{س جاص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتاص} - \text{ص جاس} + \text{جتاس} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٠}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \left(-\text{س جاص} + \text{جتاس}\right) = \text{ص جاس} - \text{جتاص}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص جاس} - \text{جتاص}}{\text{جتاس} - \text{س جاص}}$$

(ب) ٣ص = جاس جتا٢ص بتفاضل الطرفين بالنسبة الي س

∴ $٣ \frac{ءص}{ءس} = \text{جاس} \times ((-\text{جا٢ص}) \times ٢ \times \frac{ءص}{ءس}) + \text{جتا٢ص} \times (\text{جتاس})$

∴ $٣ \frac{ءص}{ءس} + \text{٢جاس جا٢ص} \frac{ءص}{ءس} = \text{جتاس جتا٢ص}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} (٣ + \text{٢جاس جا٢ص}) = \text{جتاس جتا٢ص}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{جتاس جتا٢ص}}{٣ + \text{٢جاس جا٢ص}}$

الإشتقاق البارامترى

إذا كان كل من الإحداثى السينى والإحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) دالة فى متغير ثالث ن فإن هذا المتغير الثالث يسمى الوسيط أو البارامتر

وتكون المعادلتان س = د(ن) ، ص = ر(ن) تمثلان معا معادلة منحنى فى الصورة البارامترية

ولإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ نستخدم قاعدة السلسلة حيث يكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$$

أو بصورة أخرى

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$$

ويسمى الإشتقاق فى هذه الحالة بالإشتقاق البارامترى لأننا نشتق كل من س ، ص بالنسبة للمتغير الثالث اى بالنسبة للوسيط أوالبارامتر

مثـــال:

اوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاه:

(أ) $س = (ن + ٧)(ن - ٢)$ ، $ص = (ن^٢ + ١)(ن - ٢)$ عند $ن = ١$

(ب) $س = \text{قا}^٢\theta - ١$ ، $ص = \text{ظا}\theta$ عند $\theta = \frac{-٣\pi}{٤}$

(جـ) $س = \sqrt{٣ن - ٢}$ ، $ص = \sqrt{٤ن + ١}$ عند $ن = ٢$

الحـــل:

(أ) ∵ $س = (ن + ٧)(ن - ٢) = ن^٢ + ٥ن - ١٤$ ← ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ن + ٥$

، ∵ $ص = (ن^٢ + ١)(ن - ٢) = ن^٣ - ٢ن^٢ + ن - ٢$ ← ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٣ن^٢ - ٤ن + ١$

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٣ن}^{٢} - \text{٤ن} + ١}{\text{٢ن} + ٥}$

عند $\text{ن} = ١ \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣ \times ١^{٢} - ٤ \times ١ + ١}{٢ \times ١ + ٥} = ٠$

(ب) $\because \text{س} = \text{قا}^{٢}\theta - ١ \leftarrow \therefore \frac{\text{دس}}{\text{د}\theta} = (\text{٢قا}\theta) \times \text{قا}\theta\,\text{ظا}\theta = \text{٢قا}^{٢}\theta\,\text{ظا}\theta$

، $\because \text{ص} = \text{ظا}\theta \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} = \text{قا}^{٢}\theta$

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} \div \frac{\text{دس}}{\text{د}\theta} \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{قا}^{٢}\theta}{\text{٢قا}^{٢}\theta\,\text{ظا}\theta} = \frac{١}{\text{٢ظا}\theta}$

عند $\theta = \frac{-٣\pi}{٤} = -١٣٥^{\circ} \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{٢ظا}\theta} = \frac{١}{\text{٢ظا}(-١٣٥^{\circ})} = \frac{١}{٢}$

(ج) $\because \text{س} = \sqrt{\text{٣ن} - ٢} \leftarrow \therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{٣ن} - ٢}} \times ٣ = \frac{٣}{٢\sqrt{\text{٣ن} - ٢}}$

، $\because \text{ص} = \sqrt{\text{٤ن} + ١} \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{٤ن} + ١}} \times ٤ = \frac{٢}{\sqrt{\text{٤ن} + ١}}$

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{\sqrt{\text{٤ن} + ١}} \div \frac{٣}{٢\sqrt{\text{٣ن} - ٢}} = \frac{٤\sqrt{\text{٣ن} - ٢}}{٣\sqrt{\text{٤ن} + ١}}$

عند $\text{ن} = ٢ \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤\sqrt{٣ \times ٢ - ٢}}{٣\sqrt{٤ \times ٢ + ١}} = \frac{٤ \times ٢}{٣ \times ٣} = \frac{٨}{٩}$

مثال:

باستخدام الإشتقاق البارامترى أوجد:

(أ) مشتقة $\text{س}^{٢} + ١$ بالنسبة إلى $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$

(ب) مشتقة $\sqrt{٨ + \text{س}^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ عند $\text{س} = ١$

(ج) مشتقة $\text{س} - \text{جاس}$ بالنسبة إلى $١ - \text{جتاس}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

الحل:

(أ) نضع $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}^2 - 1}} \times \text{٢س} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - 1}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \div \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{٢س} \div \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - 1}} = 2\sqrt{\text{س}^2 - 1}$

أى أن مشتقة $\text{س}^2 + 1$ بالنسبة إلى $\sqrt{\text{س}^2 - 1}$ تساوى $2\sqrt{\text{س}^2 - 1}$

وبصورة رياضية $\frac{\text{د}}{\text{د}\left(\sqrt{\text{س}^2 - 1}\right)}\left[\text{س}^2 + 1\right] = 2\sqrt{\text{س}^2 - 1}$

(ب) نضع $\text{ص} = \sqrt{8 + \text{س}^2}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{س}}{\text{س} + 1}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{8 + \text{س}^2}} \times \text{٢س} = \frac{\text{س}}{\sqrt{8 + \text{س}^2}}$

، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{1 \times (\text{س} + 1) - 1 \times \text{س}}{(\text{س} + 1)^2} = \frac{1}{(\text{س} + 1)^2}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \div \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{8 + \text{س}^2}} \div \frac{1}{(\text{س} + 1)^2} = \frac{\text{س}(\text{س} + 1)^2}{\sqrt{8 + \text{س}^2}}$

عند $\text{س} = 1 \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{1 \times (1 + 1)^2}{\sqrt{8 + 1^2}} = \frac{4}{3}$

أى أن مشتقة $\sqrt{8 + \text{س}^2}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} + 1}$ عند $\text{س} = 1$ تساوى $\frac{4}{3}$

(جـ) نضع $\text{ص} = \text{س} - \text{جاس}$ ، $\text{ع} = 1 - \text{جتاس}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 - \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{جاس}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \div \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{جاس}}$

عند $\text{س} = \frac{\pi}{3} \leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{1 - \text{جتا}\,60^\circ}{\text{جا}\,60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

أى أن مشتقة $\text{س} - \text{جاس}$ بالنسبة إلى $1 - \text{جتاس}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{3}$ تساوى $\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثـــال:

أوجد قيمة البارامتر ع التى يكون عندها للمنحنى :

$س = ٢ع^٣ - ٥ع^٢ - ٤ع + ١٢$ ، $ص = ٢ع^٢ + ع - ٤$ مماس أفقى وآخر رأسى

الحـــل:

$\because س = ٢ع^٣ - ٥ع^٢ - ٤ع + ١٢ \leftarrow \therefore \frac{دس}{دع} = ٦ع^٢ - ١٠ع - ٤$

، $\because ص = ٢ع^٢ + ع - ٤ \leftarrow \therefore \frac{دص}{دع} = ٤ع + ١$

$\because \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \div \frac{دس}{دع} \leftarrow \therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٤ع + ١}{٦ع^٢ - ١٠ع - ٤}$

$\therefore$ ميل المماس للمنحنى كدالة فى البارامتر ع يساوى $\frac{٤ع + ١}{٦ع^٢ - ١٠ع - ٤}$

- إذا كان المماس أفقى

$\therefore$ ميل المماس $= ٠$ أى أن بسط الميل $= ٠$ $\therefore ٤ع + ١ = ٠$ $\therefore ع = \frac{-١}{٤}$

- إذا كان المماس رأسى

$\therefore$ ميل المماس غير معرف أى أن مقام الميل $= ٠$ $\therefore ٦ع^٢ - ١٠ع - ٤ = ٠$

$\therefore ٣ع^٢ - ٥ع - ٢ = ٠$ $\therefore (٣ع + ١)(ع - ٢) = ٠$ $\therefore ع = \frac{-١}{٣}$ أو $ع = ٢$

١ - ٣ المشتقات العليا للدالة

المشتقات ذات الرتب العليا:

إذا كانت ص = د(س) قابلة للإشتقاق فإنه بالتفاضل نحصل علي المشتقة الاولي للدالة

ورمزها هو $\frac{ءص}{ءس}$ او صَ او دَ(س)

وإذا كانت المشتقة الاولي قابلة للإشتقاق فإنه بالتفاضل نحصل علي مشتقة المشتقة الاولي

وتسمي المشتقة الثانية للدالة ورمزها هو $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ او صً او دً(س)

وإذا كانت المشتقة الثانية قابلة للإشتقاق فإنه بالتفاضل نحصل علي مشتقة المشتقة الثانية

وتسمي المشتقة الثالثة للدالة ورمزها هو $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ او صًّ او دًّ(س)

وإذا كانت المشتقة الثالثة قابة للإشتقاق فإنه بالتفاضل نحصل علي المشتقة الرابعة .... وهكذا...

و مشتقات للدالة بدءا من المشتقة الثانية تسمى بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة ن كايلى:

$$ص^{(ن)} = \frac{ء^نص}{ءس^ن} = د^{(ن)}(س)$$ حيث ن عدد صحيح موجب

✸ ملاحظات:

١) $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ تقرأ دال اتنين ص على دال س اتنين

٢) لاحظ الفرق بين $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ ، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ فالرمز الأول هو المشتقة الثانية بينما الرمز الثانى هو مربع المشتقة الأولى

مثـــال:

اوجد المشتقة الثالثة لكل من:

ⓐ $ص = س^٤ - ٢س^٢ + ٥$

ⓑ $ع = (٢ن - ١)^٤$

ⓙ $د(س) = جتا(٢س + \pi)$

ⓓ $د(س) = \frac{س}{س - ١}$

الحـــل:

ⓐ ∵ $ص = س^٤ - ٢س^٢ + ٥$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤س^٣ - ٤س$ ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١٢س^٢ - ٤$ ، $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = ٢٤س$

ⓑ ∵ $ع = (٢ن - ١)^٤$ ← ∴ $\frac{ءع}{ءن} = ٤(٢ن - ١)^٣ \times ٢ = ٨(٢ن - ١)^٣$

، $\frac{ء^٢ع}{ءن^٢} = ٨ \times ٣(٢ن - ١)^٢ \times ٢ = ٤٨(٢ن - ١)^٢$

، $\frac{ء^٣ع}{ءن^٣} = ٤٨ \times ٢(٢ن - ١) \times ٢ = ١٩٢(٢ن - ١)$

(جـ) $\because$ د(س) = جتا(٢س + π) ← $\therefore$ د′(س) = − ٢جا(٢س + π)

، د″(س) = − ٤جتا(٢س + π) ، د‴(س) = ٨جا(٢س + π)

(د) $\because$ د(س) = $\frac{س}{س - ١}$ $\therefore$ د′(س) = $\frac{١ \times (س - ١) - ١ \times س}{(س - ١)^٢} = \frac{-١}{(س - ١)^٢}$

، د″(س) = $\frac{٠ \times (س - ١)^٢ - ٢(س + ١) \times ١ \times (-١)}{(س + ١)^٢} = \frac{٢}{س - ١}$

، د‴(س) = $\frac{٠ \times (س - ١) - ١ \times ٢}{(س - ١)^٢} = \frac{-٢}{(س - ١)^٢}$

مثـــال:

(أ) إذا كانت $س^٢ + ص^٢ = ٩$ اثبت أن: $ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + (\frac{ءص}{ءس})^٢ + ١ = ٠$

(ب) إذا كانت ص = ظاس اثبت أن: $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ص(١ + ص^٢)$

الحـــل:

(أ) $\because س^٢ + ص^٢ = ٩$ بتفاضل الطرفين بالنسبة الي س

$\therefore ٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ ← $\therefore س + ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ بتفاضل الطرفين مرة ثانية

$\therefore ١ + \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس} + \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} \times ص = ٠$

$\therefore ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + (\frac{ءص}{ءس})^٢ + ١ = ٠$ وهو المطلوب

(ب) $\because$ ص = ظاس بتفاضل الطرفين $\therefore \frac{ءص}{ءس} = قا^٢س$ بتفاضل الطرفين مرة ثانية

$\therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢قاس \times قاس ظاس = ٢قا^٢س ظاس$ بالتعويض عن $قا^٢س = ١ + ظا^٢س$

$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 2ظاس(1+ظا^2س)$ بالتعويض عن $ظاس = ص$ ، $ظا^2س = ص^2$

$$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 2ص(1+ص^2)$$ وهو المطلوب

مثـــال:

إذا كانت $س = ع^2 - 2ع$ ، $ص = ع^2$ أوجد: $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ ، $\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ عند $ع = 2$

الحـــل:

$\because س = ع^2 - 2ع$ ، $ص = ع^2$

$\therefore \frac{ءس}{ءع} = 2ع - 2$ ، $\frac{ءص}{ءع} = 2ع$

$\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \div \frac{ءس}{ءع} \leftarrow \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{2ع}{2ع-2} \leftarrow$ $$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ع}{ع-1}$$

$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = \frac{ء}{ءع}\left(\frac{ع}{ع-1}\right) \times \frac{ءع}{ءس}$

$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = \left(\frac{(ع-1)\times 1 - 1\times ع}{(ع-1)^2}\right) \times \left(\frac{1}{2(ع-1)}\right) \leftarrow$ $$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = \frac{-1}{2(ع-1)^3}$$

$\therefore \frac{ء^3ص}{ءس^3} = \frac{ء}{ءع}\left(\frac{-1}{2(ع-1)^3}\right) \times \frac{ءع}{ءس}$

$\therefore \frac{ء^3ص}{ءس^3} = \left(\frac{0 - 6(ع-1)^2 \times (-1)}{(2(ع-1)^3)^2}\right) \times \left(\frac{1}{2(ع-1)}\right) \leftarrow$ $$\therefore \frac{ء^3ص}{ءس^3} = \frac{3}{4(ع-1)^5}$$

عند $ع = 2$ $\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = \frac{-1}{2(ع-1)^3} = \frac{-1}{2(2-1)^3} = \frac{-1}{2}$

، $\frac{ء^3ص}{ءس^3} = \frac{3}{4(ع-1)^5} = \frac{3}{4(2-1)^5} = \frac{3}{4}$

١ - ٤ معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

✱الطرق المختلفة لمعرفة ميل المماس والعمودي:

١) ميل المماس للمنحنى عند اى نقطه = المشتقة الاولي للمنحنى عند نفس النقطه أى أن :

ميل المماس عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) = $م = \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(س_١، ص_١)}$

٢) ميل العمودى للمنحنى عند اى نقطه = - مقلوب ميل المماس عند نفس النقطه أى أن :

ميل العمودى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) = $\frac{-١}{م} = -١ \div \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(س_١، ص_١)}$

٣) اذا علم قياس الزاويه هـ التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن:

ميل المماس = ظل الزاويه هـ أى أن $م = ظا هـ$

٤) اذا كان المماس يمر بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن:

ميل المماس = فرق الصادات على فرق السينات أى أن $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

٥) اذا كان المماس يوازى المستقيم $أس + بص + جـ = ٠$ فإن:

ميل المماس = ميل المستقيم أى أن $م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

٦) اذا كان المماس عمودى على المستقيم $أس + بص + جـ = ٠$ فإن:

ميل المماس = - مقلوب ميل المستقيم أى أن $م = \frac{-ب}{أ}$

٧) اذا كان المماس يوازى محور السينات (المماس أفقى) فإن:

ميل المماس = صفر اى أن $م = ٠$ اى أن بسط الميل = صفر

٨) اذا كان المماس يوازى محور الصادات (المماس رأسى) فإن:

ميل المماس = غير معرف اى أن $م = \frac{١}{٠}$ أى أن مقام الميل = صفر

✸ معادلة المماس والعمودي :

١) معادلة المماس للمنحنى بمعلومية الميل (م) ونقطة التماس $(س_1 ، ص_1)$ هي:

$$ص - ص_1 = م(س - س_1) \quad \text{او} \quad \frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$$

٢) معادلة العمودى للمنحنى عند نقطة التماس $(س_1 ، ص_1)$ هي:

$$ص - ص_1 = \frac{-1}{م}(س - س_1) \quad \text{او} \quad \frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{-1}{م}$$

إيجاد نقط التقاطع:

١) لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونحسب قيم س

٢) لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونحسب قيم ص

٣) لإيجاد نقط تقاطع منحنى مع مستقيم نحل معادلتى المنحنى والمستقيم جبريا

٤) لإيجاد نقط تقاطع منحنى مع منحنى نحل معادلتى المنحنيين جبريا

ملاحظات:

١) المنحنيان يتماسان اي يكون لهما مماس مشترك اذا كان:

ميل المماس للمنحنى الأول = ميل المماس للمنحنى الثاني

٢) المنحنيان يتقاطعان علي التعامد إذا كان ميل المماس للاول × ميل المماس للثاني = -١

٣) إذا وقعت نقطة علي المنحنى فهى تحقق معادلة المنحنى

مثـــال:

اوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $ص = ٣ + قاس$ عند النقطة التى إحداثيها السينى $= \frac{٢\pi}{٣}$

الحـــل:

$\because ص = ٣ + قاس$ ، $س = \frac{٢\pi}{٣}$ $\therefore ص = ٣ + قا\frac{٢\pi}{٣} = ٣ - ٢ = ١$

$\therefore$ النقطة $(\frac{٢\pi}{٣} ، ١)$ تقع على المنحنى

$\because$ ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة $= \frac{ءص}{ءس} = قاس\, ظاس$

∴ ميل المماس $= م =$ قا$\frac{٢\pi}{٣}$ ظا$\frac{٢\pi}{٣}$ $= ٢\sqrt{٣}$ ، ميل العمودى $= \frac{-١}{م} = \frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

معادلة المماس: ص $-$ ص$_١$ $= م($س $-$ س$_١)$

ص $- ١ = ٢\sqrt{٣}($س $- \frac{٢\pi}{٣})$ ← ∴ $٢\sqrt{٣}$ س $-$ ص $- \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}\pi + ١ = ٠$

معادلة العمودى: ص $-$ ص$_١$ $= \frac{-١}{م}($س $-$ س$_١)$

ص $- ١ = \frac{-١}{٢\sqrt{٣}}($س $- \frac{٢\pi}{٣})$ ← ∴ س $+ ٢\sqrt{٣}$ ص $- \frac{٢}{٣}\pi - ٢\sqrt{٣} = ٠$

مثـــال:

اوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى س = جتاθ ، ص $= \sqrt{٢} +$ جاθ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

الحـــل:

∵ س = جتاθ ← ∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = -$جاθ

، ∵ ص $= \sqrt{٢} +$ جاθ ← ∴ $\frac{ءص}{ء\theta} =$ جتاθ

∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta}$ ← ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{جتا}\theta}{-\text{جا}\theta}$ ← ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -$ظتاθ

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ ∴ ميل المماس $= -$ظتا$\frac{\pi}{٤} = -١$ ∴ ميل العمودى $= ١$

∴ س = جتا$\frac{\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ص $= \sqrt{٢} +$ جا$\frac{\pi}{٤} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ ∴ النقطة $(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{٣\sqrt{٢}}{٢})$

معادلة المماس: ص $-$ ص$_١$ $= م($س $-$ س$_١)$

ص $- \frac{٣\sqrt{٢}}{٢} = -١ \times ($س $- \frac{\sqrt{٢}}{٢})$ ← ∴ س $+$ ص $- ٢\sqrt{٢} = ٠$

معادلة العمودى: ص $-$ ص$_١$ $= \frac{-١}{م}($س $-$ س$_١)$

ص $- \frac{٣\sqrt{٢}}{٢} = ١ \times ($س $- \frac{\sqrt{٢}}{٢})$ ← ∴ س $-$ ص $+ \sqrt{٢} = ٠$

مثـــال:

أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى $٣س^٢ + ص^٢ = ١٢$
عند النقطة (−١، ٣) الواقعة عليه

الحـــل:

$\because ٣س^٢ + ص^٢ = ١٢$ بتفاضل الطرفين $\therefore ٦س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٣س}{ص}$

عند النقطة (−١، ٣) $\therefore$ ميل المماس $م = \frac{-٣ \times (-١)}{٣} = ١$ ، ميل العمودى $\frac{-١}{م} = -١$

معادلة المماس هى:

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$ $\therefore ص - ٣ = ١(س + ١)$ $\therefore ص = س + ٤$

، معادلة العمودى هى:

$ص - ص_١ = \frac{-١}{م}(س - س_١)$ $\therefore ص - ٣ = -١(س + ١)$ $\therefore ص = -س + ٢$

نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع $ص = ٠$ $\therefore س + ٤ = ٠$ $\therefore س = -٤$

نقطة تقاطع العمودى مع محور السينات نضع $ص = ٠$ $\therefore -س + ٢ = ٠$ $\therefore س = ٢$

$\therefore$ طول قاعدة المثلث $= ٢ - (-٤) = ٦$

، إرتفاع المثلث = الإحداثى الصادى للنقطة الواقعة على المنحنى = ٣

$\therefore$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٣ = ٩$ وحدة مربعة

مثـــال:

اثبت أن المنحنيين $(س - ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ ، $(س + ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ يتقاطعان على التعامد ، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع.

الحـــل:

لإيجاد نقط التقاطع نحل معادلتى المنحنيين جبريا

$(س - ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ (١)

$(س + ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ (٢) بالطرح

$(س - ١)^٢ - (س + ١)^٢ = ٠$ ← $\therefore س^٢ - ٢س + ١ - س^٢ - ٢س - ١ = ٠$

$\therefore -٤س = ٠$ ← $\therefore س = ٠$ بالتعويض فى (١)

$\therefore (٠ - ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ ← $\therefore ص^٢ = ٢ - ١ = ١$ ← $\therefore ص = \pm ١$

∴ نقطتى التقاطع هما (٠ ، ١) ، (٠ ، −١)

∵ $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢$ بتفاضل الطرفين بالنسبة الى س

∴ $٢(س - ١) + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠$ ∴ ميل المماس للمنحنى الأول $= \frac{دص}{دس} = \frac{-س + ١}{ص}$

، ∵ $(س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢$ بتفاضل الطرفين بالنسبة الى س

∴ $٢(س + ١) + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠$ ∴ ميل المماس للمنحنى الثانى $= \frac{دص}{دس} = \frac{-س - ١}{ص}$

عند النقطة (٠ ، ١)	عند النقطة (٠ ، −١)
ميل المماس للمنحنى الأول $م_{١} = \frac{-٠ + ١}{١} = ١$	ميل المماس للمنحنى الأول $م_{١} = \frac{-٠ - ١}{١} = -١$
ميل المماس للمنحنى الثانى $م_{٢} = \frac{-٠ - ١}{١} = -١$	ميل المماس للمنحنى الثانى $م_{٢} = \frac{-٠ + ١}{١} = ١$
∴ $م_{١} \times م_{٢} = -١ \times ١ = -١$	∴ $م_{١} \times م_{٢} = -١ \times ١ = -١$
المنحنيان متقاطعان على التعامد عند هذه النقطة	المنحنيان متقاطعان على التعامد عند هذه النقطة
معادلة المماس الأول: $ص - ص_{١} = م_{١}(س - س_{١})$	معادلة المماس الأول: $ص - ص_{١} = م_{١}(س - س_{١})$
$ص - ١ = ١(س - ٠)$ ∴ $س - ص + ١ = ٠$	$ص + ١ = ١(س - ٠)$ ∴ $س - ص - ١ = ٠$
معادلة المماس الثانى: $ص - ص_{١} = م_{١}(س - س_{١})$	معادلة المماس الثانى: $ص - ص_{١} = م_{١}(س - س_{١})$
$ص - ١ = -١(س - ٠)$ ∴ $س + ص - ١ = ٠$	$ص + ١ = -١(س - ٠)$ ∴ $س + ص + ١ = ٠$

مثـــال:

أوجد معادلتى المماسين للمنحنى $ص^{٢} = ٨س$ المارين بالنقطة (−٢ ، ٠) واثبت أنهما متعامدان.

الحـــل:

لاحظ أن النقطة المعطاه لا تقع على المنحنى لأنها لاتحقق معادلته أى أنها ليست نقطة التماس

∴ نفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب)

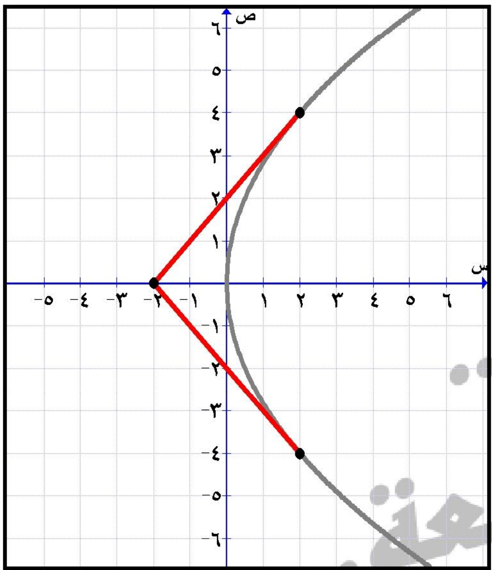
وبالتعويض فى معادلة المنحنى ∴ $ب^{٢} = ٨أ$ (١)

، ∵ $ص^{٢} = ٨س$ ⟸ ∴ $٢ص \frac{دص}{دس} = ٨$ ⟸ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{ص}$

عند النقطة (أ ، ب) ⟸ ∴ ميل المماس $= م = \left(\frac{دص}{دس}\right)_{(أ،ب)} = \frac{٤}{ب}$

∵ المماس يمر بالنقطتين (أ ، ب) ، (−٢ ، ٠) ∴ ميل المماس $= \frac{ب - ٠}{أ + ٢} = \frac{ب}{أ + ٢}$

∴ $\frac{ب}{أ + ٢} = \frac{٤}{ب}$ ⇐ ∴ $ب^{٢} = ٤أ + ٨$ (٢)



بحل المعادلتين ١ ، ٢ بالتعويض من ١ فى ٢ ∴ $٨أ = ٤أ + ٨$

∴ $٤أ = ٨$ ⇐ ∴ $أ = \frac{٨}{٤} = ٢$ بالتعويض فى (١)

∴ $ب^{٢} = ٨ \times ٢ = ١٦$ ⇐ ∴ $ب = \sqrt{١٦} = \pm ٤$

نقطتى التماس هما (٢ ، ٤) ، (٢ ، −٤)

∴ ميل المماس الأول $م_{١} = \frac{٤}{ب} = \frac{٤}{٤} = ١$

، ميل المماس الثانى $م_{٢} = \frac{٤}{ب} = \frac{٤}{-٤} = -١$

∴ $م_{١} \times م_{٢} = ١ \times (-١) = -١$ ⇐ ∴ المماسان متعامدان #

معادلة المماس الأول هى $ص - ص_{١} = م_{١}(س - س_{١})$

∴ $ص - ٤ = ١ \times (س - ٢)$ ⇐ **∴ $س - ص + ٢ = ٠$** #

، معادلة المماس الثانى هى $ص - ص_{٢} = م_{٢}(س - س_{٢})$

∴ $ص + ٤ = -١ \times (س - ٢)$ ⇐ **∴ $س + ص + ٢ = ٠$** #

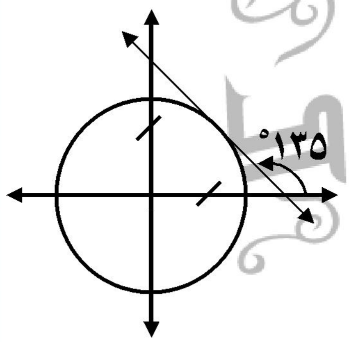
مثـــال:

إذا كان المماس للمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠$ يصنع مثلثا متساوى الساقين مع محورى الإحداثيات فى الربع الأول فأوجد معادلة المماس ثم أوجد مساحة سطح المثلث الذى يصنعه المستقيم.

الحـــل:

$س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠$ بالتفاضل ∴ $٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠$ ⇐ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$ (١)

المماس يصنع مثلث متساوى الساقين مع محورى الاحداثيات فى الربع الاول تعنى أن المماس يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات كما هو موضح بالشكل المجاور



∴ ميل المماس = ظا ١٣٥° = −١ بالتعويض فى (١)

∴ $\frac{-س}{ص} = -١$ ⇐ ∴ س = ص بالتعويض فى معادلة المنحنى

∴ $س^٢ + س^٢ = ٥٠$ ⇐ ∴ $س^٢ = ٢٥$ ⇐ ∴ $س = \pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

∴ س = ٥ وترفض الاجابة السالبة لأن النقطة فى الربع الأول

∴ ص = ٥ ∴ نقطة التماس هى (٥ ، ٥)

معادلة المماس هى:

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

∴ ص − ٥ = −١ × (س − ٥) ← **∴ ص + س − ١٠ = ٠**

تقاطع المماس مع السينات نضع ص = ٠ ∴ ٠ + س − ١٠ = ٠ ⇐ ∴ س = ١٠

تقاطع المماس مع الصادات نضع س = ٠ ∴ ص + ٠ − ١٠ = ٠ ⇐ ∴ ص = ١٠

طول قاعدة المثلث = ١٠ وحدة طول ، ارتفاع المثلث = ١٠ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ = ٥٠ وحدة مربعه

ملاحظة:

١) أذا كان المماس يصنع مثلث متساوى الساقين مع محورى الاحداثيات فى الربع الاول أو فى الربع الثالث

∴ المماس يصنع زاوية قياسها ١٣٥° ∴ ميل المماس = ظا ١٣٥° = − ١

٢) إذا كان المماس يصنع مثلث متساوى الساقين مع محورى الاحداثيات فى الربع الثانى أو فى الربع الرابع

∴ المماس يصنع زاوية قياسها ٤٥° ∴ ميل المماس = ظا ٤٥° = ١

مثـــال:

إذا كان العمودى للمنحنى ص = ٤ − $س^٢$ عند النقطة أ (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة اخرى عند نقطة جـ فأوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة جـ ثم أوجد قياس الزاوية بين المماسين المرسومين عند أ ، جـ

الحـــل:

ص = ٤ − $س^٢$ ⇐ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -٢س$

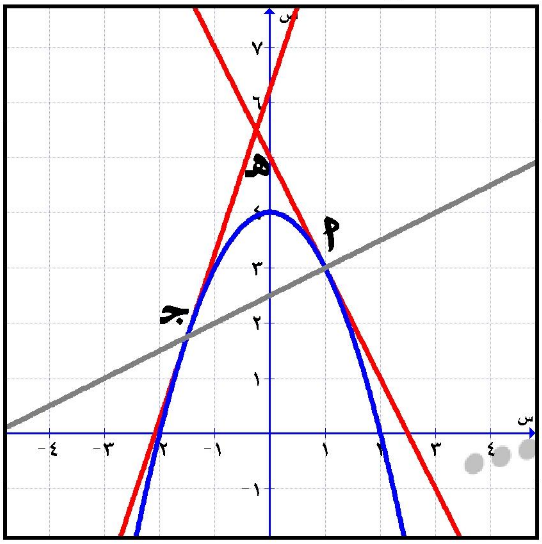
عند النقطة (١ ، ٣) ⇐ ∴ ميل المماس = م = $\frac{ءص}{ءس}_{(١،٣)}$ = −٢ × ١ = −٢

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ ⇐ ∴ ميل العمودى = $\frac{-١}{م} = \frac{١}{٢}$

معادلة العمودى هى $ص - ص_١ = \frac{-١}{م}(س - س_١)$

$\therefore$ ص − ٣ = $\frac{١}{٢}$(س − ١) $\Leftarrow$ **$\therefore$ س − ٢ص + ٥ = ٠**

لإيجاد نقط تقاطع العمودى مع المنحنى نحل معادلة العمودى مع معادلة المنحنى



من معادلة العمودى $\therefore$ س = ٢ص − ٥ (١)

بالتعويض فى معادلة المنحنى $\therefore$ ص = ٤ − $(٢ص − ٥)^{٢}$

$\therefore$ ص = ٤ − ٤$ص^{٢}$ + ٢٠ص − ٢٥

$\therefore$ ص = ٤ − ٤$ص^{٢}$ + ٢٠ص − ٢٥

$\therefore$ ٤$ص^{٢}$ − ١٩ص + ٢١ = ٠

$\therefore$ (ص − ٣)(٤ص − ٧) = ٠

$\therefore$ ص = ٣ أو ص = $\frac{٧}{٤}$

بالتعويض فى (١)

$\therefore$ س = ٢×٣ − ٥ = ١ $\therefore$ النقطة (١ ، ٣) وهى النقطة المعطاة

أو س = ٢ × $\frac{٧}{٤}$ − ٥ = $\frac{-٣}{٢}$ $\therefore$ نقطة جـ = ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٤}$)

عند النقطة جـ = ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٤}$) $\Leftarrow$ $\therefore$ **ميل المماس** = م = −٢ × $\frac{-٣}{٢}$ = ٣

$\therefore$ **معادلة المماس عند جـ هى:**

ص − $ص_{١}$ = م(س − $س_{١}$) $\Leftarrow$ $\therefore$ ص − $\frac{٧}{٤}$ = ٣(س + $\frac{٣}{٢}$) **بالضرب** × ٤

$\therefore$ ٤ص − ٧ = ١٢س + ١٨ $\Leftarrow$ **$\therefore$ ١٢س − ٤ص + ٢٥ = ٠**

ايجاد الزاوية بين المماسين:

إذا كانت الزاوية بين المماسين هى هـ فإن: ظاهـ = ± ($\frac{م_{١} − م_{٢}}{١ + م_{١} × م_{٢}}$) **حيث** $م_{١}$ ، $م_{٢}$ **هما ميلا المماسين**

$\because$ **ميل المماس الأول عند أ هو** $م_{١}$ = −٢ ، **ميل المماس الثانى عند جـ هو** $م_{٢}$ = ٣

$\therefore$ ظاهـ = ± ($\frac{م_{١} − م_{٢}}{١ + م_{١} × م_{٢}}$) = ± ($\frac{−٢ − ٣}{١ + (−٢) × ٣}$) = ±١

$\therefore$ **الزاوية بين المماسين تساوى** ٤٥° أو ١٣٥°

٥ - ١ المعدلات الزمنية المرتبطة

إذا كانت ص = د(س) وكان كلا من س ، ص دالة في متغير آخر مثل الزمن فإنه بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن نحصل على المعدل الزمنى لتغير كل من س ، ص حيث يكون:

$$\frac{d}{dn}(س^م) = م\,س^{م-1} \times \frac{dس}{dn} \quad ، \quad \frac{d}{dn}(ص^ك) = ك\,ص^{ك-1} \times \frac{dص}{dn}$$

أى أنه لايجاد معدل تغير س ، ص بالنسبة للزمن فإننا نفاضل س ، ص تفاضل عادى ثم نضرب فى معدل تغير كل منهما بالنسبة للزمن.

وهذه الحالة تسمى المعدلات الزمنية المرتبطة نظرا لإرتباط المتغيرات س ، ص بالزمن

والمعدل الزمنى يكون موجبا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن مثل: التزايد، التمدد، التباعد، التراكم، ...

ويكون سالبا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن مثل: التناقص ، الإنكماش ، الإقتراب ، التسرب ، ...

✱ خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية:

١) يتم رسم شكل توضيحى للمسألة إن أمكن وذلك للمسائل التى لاتحتوى على أشكال هندسية مثل المربع والمستطيل والدائرة والمكعب ومتوازى المستطيلات والكرة و ..... الخ.

٢) يتم فرض المتغيرات الموجودة بالمسألة بأحد الرموز س ، ص ، ع ، ....

٣) يتم تكوين معادلة رياضية بين هذه المتغيرات وهذه المعادلة يتم تكوينها من خلال قوانين المساحة او المحيط او الحجم او من نظرية فيثاغورث أو من تشابه المثلثات أو من قوانين حساب المثلثات وذلك حسب معطيات وظروف كل مسألة.

٤) يتم إجراء التفاضل لطرفى المعادلة بالنسبة للزمن.

٥) يتم التعويض بالقيم المعطاة لإيجاد المطلوب.

مثـــال:

تتحرك نقطة علي منحنى معادلته $س^2 + ص^2 - ٤س + ٨ص - ٦ = ٠$ فإذا كان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٣، ١) يساوى ٤ وحدات/ث أوجد معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة.

الحـــل:

$\because س^2 + ص^2 - ٤س + ٨ص - ٦ = ٠$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$$\therefore ٢س\frac{dس}{dn} + ٢ص\frac{dص}{dn} - ٤\frac{dس}{dn} + ٨\frac{dص}{dn} = ٠$$

$$\therefore س\frac{dس}{dn} + ص\frac{dص}{dn} - ٢\frac{dس}{dn} + ٤\frac{dص}{dn} = ٠$$

عند النقطة $(٣ ، ١)$ وبالتعويض عن $\frac{ءس}{ءن} = ٤$

$\therefore ٣ \times ٤ + ١ \times \frac{ءص}{ءن} - ٢ \times ٤ + ٤ \frac{ءص}{ءن} = ٠$

$\therefore ٥ \frac{ءص}{ءن} = -٤ \leftarrow \therefore \frac{ءص}{ءن} = \frac{-٤}{٥}$ وحدات/ث

مثال:

مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم / د ، وتزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم^{٢} / د ، أوجد طول ضلع المكعب فى هذه اللحظة ومعدل الزيادة فى حجمه حينئذ.

الحل:

نفرض أن طول ضلع المكعب (ل) ومساحة سطحه (م) وحجمه (ع) دوال قابلة للإشتقاق فى ن

$\therefore م = ٦ل^{٢}$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن $\therefore \frac{ءم}{ءن} = ١٢ ل \times \frac{ءل}{ءن}$

$\because \frac{ءل}{ءن} = ٠,٠٢$ ، $\frac{ءم}{ءن} = ٠,٧٢$

$\therefore ٠,٧٢ = ١٢ ل \times ٠,٠٢ \leftarrow \therefore ل = \frac{٠,٧٢}{٠,٢٤} = ٣$ سم #

$\therefore ع = ل^{٣}$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{ءع}{ءن} = ٣ل^{٢} \times \frac{ءل}{ءن}$

$\because \frac{ءل}{ءن} = ٠,٠٢$ ، ل = ٣ سم

$\therefore \frac{ءع}{ءن} = ٣ \times ٣^{٢} \times ٠,٠٢ = ٠,٥٤$ سم^{٣}/د #

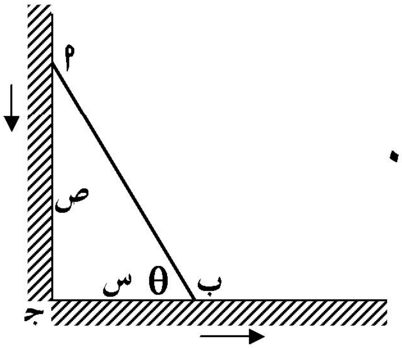
تذكر أن:
إذا كان طول ضلع المكعب ل فإن:
- مساحة الوجه الواحد $= ل^{٢}$
- المساحة الجانبية $= ٤ل^{٢}$
- المساحة الكلية(السطحية) $= ٦ل^{٢}$
- حجم المكعب $= ل^{٣}$

مثال:

يرتكز سلم بطرفه الأسفل علي أرض افقية وبطرفه الأعلى علي حائط رأسي ، فإذا إنزلق الطرف السفلى للسلم مبتعدا عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/ث ، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{٣}$.

الحل:

نفرض أن بعد الطرف السفلي عن الحائط (س) وبعد الطرف العلوي عن الحائط (ص) وزاوية ميل السلم على الآرض (θ) دوال قابلة للإشتقاق فى ن ، ونفرض أن طول السلم (ل)



في Δ أبجـ ∵ $(\text{أب})^2 = (\text{أجـ})^2 + (\text{جـب})^2$

∴ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ل}^2$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ $2\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0 \longleftarrow \therefore \text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0$

عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$

∴ $\text{ص} = \text{س ظا}\frac{\pi}{3} = \text{س}\sqrt{3}$ ، ∵ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 30$ سم/ث

∴ $\text{س} \times 30 + \text{س}\sqrt{3}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 0$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-30\text{س}}{\text{س}\sqrt{3}} = -10\sqrt{3}$ سم/ث

اي ان الطرف العلوى يتحرك مقتربا من الأرض بمعدل $10\sqrt{3}$ سم/ث

✱ ملاحظة هامة :

إذا كان س_0 هى القيمة الإبتدائية للمتغير س (عند ن = ٠) ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ،

س هى قيمة المتغير بعد زمن ن فإن: $\text{س} = \text{س}_0 + \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \text{ن}$

فمثلا:

إذا كانت كتلة صاروخ ما ١٥ طن وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت ٢٠٠ كجم / ث فلإيجاد كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من إنطلاقه نجد أن:

ك = ١٥٠٠٠ كجم ، $\frac{\text{دك}}{\text{دن}} = -200$ كجم / ث (الكتلة تقل) ، ن = ٣٠ ث

∵ $\text{ك} = \text{ك}_0 + \frac{\text{دك}}{\text{دن}} \times \text{ن}$ ∴ $\text{ك} = 15000 - 200 \times 30 = 9000$ كجم

أى أن كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من انطلاقه هى ٩ طن

📖 مثـــال:

جسم معدنى على شكل متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها يتزايد بمعدل ١ سم/د وارتفاعه يتناقص بمعدل ٢ سم/د . أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥ سم وإرتفاعه ٢٠ سم ، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات عن الزيادة.

✍ الحــــل:

نفرض أن طول ضلع القاعدة (س) والإرتفاع (ص) والحجم (ع) دوال قابلة للإشتقاق فى ن

∵ حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الإرتفاع

∴ ع = س^{2} ص بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$$∴ \frac{دع}{دن} = ٢س \times \frac{دس}{دن} \times ص + \frac{دص}{دن} \times س^{2}$$

$$∵ \frac{دس}{دن} = ١ \quad ، \quad \frac{دص}{دن} = -٢ \quad ، \quad س = ٥ \quad ، \quad ص = ٢٠$$

$$∴ \frac{دع}{دن} = ٢ \times ٥ \times ١ \times ٢٠ - ٢ \times ٥^{2} \quad \leftarrow \quad ∴ \frac{دع}{دن} = ١٥٠ \text{ سم}^{3}/\text{د}$$

حجم متوازى المستطيلات يتوقف عن الزيادة عندما $\frac{دع}{دن} = ٠$

$$∴ ٢س \times ١ \times ص - ٢ \times س^{2} = ٠ \qquad ∴ ٢س(ص - س) = ٠ \qquad ∴ س = ص$$

$$∴ س_{٠} + \frac{دس}{دن} \times ن = ص_{٠} + \frac{دص}{دن} \times ن \quad \leftarrow \quad ∴ ٥ + ١ \times ن = ٢٠ - ٢ \times ن$$

$$∴ ٢ن + ن = ٢٠ - ٥ \quad \leftarrow \quad ∴ ٣ن = ١٥ \quad \leftarrow \quad ∴ ن = ٥ \text{ دقائق}$$

مثـــــال:

مستطيل طولة ٢٤ سم وعرضه ١٠ سم يتناقص طوله بمعدل ٢سم/ث بينما يتزايد عرضه بمعدل ١,٥ سم/ث. أوجد معدل زيادة أو نقصان مساحته بعد مضي ٤ ثواني. ثم أوجد الزمن الذي تتوقف فيه المساحة عن الزيادة أو النقصان وكم تكون مساحة المستطيل حينئذ؟

الحـــــل:

نفرض أن بعدى المستطيل بعد ن ثانية هما س ، ص

$$∵ س = س_{٠} + \frac{دس}{دن} \times ن \quad \leftarrow \quad ∴ س = ٢٤ - ٢ن$$

$$، ∵ ص = ص_{٠} + \frac{دص}{دن} \times ن \quad \leftarrow \quad ∴ ص = ١٠ + ١,٥ن$$

∵ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$∴ م = (٢٤ - ٢ن)(١٠ + \frac{٣}{٢}ن) = ٢٤٠ + ١٦ن - ٣ن^{2} \quad (١)$$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$$∴ \frac{دم}{دن} = ١٦ - ٦ن \quad \text{عندما } ن = ٤ \text{ ث} \quad \leftarrow \quad ∴ \frac{دم}{دن} = ١٦ - ٦ \times ٤ = -٨ \text{ سم}^{2}/\text{ث}$$

اي أنه عندما ن = ٤ فأن المساحة تتناقص بمعدل ٨ سم^{2}/ث

وينعدم التناقص عندما $\frac{ءم}{ءن} = ٠$ ∴ $١٦ - ٦ن = ٠$ ⟸ ∴ $ن = \frac{١٦}{٦} = \frac{٨}{٣}$ ث

وبالتعويض في (١)

∴ $م = ٢٤٠ + ١٦ \times \frac{٨}{٣} - ٣(\frac{٨}{٣})^٢$ ← ∴ $م = ٢٤٠ + \frac{١٢٨}{٣} - \frac{٦٤}{٣} = ٢٦١\frac{١}{٣}$ سم^٢

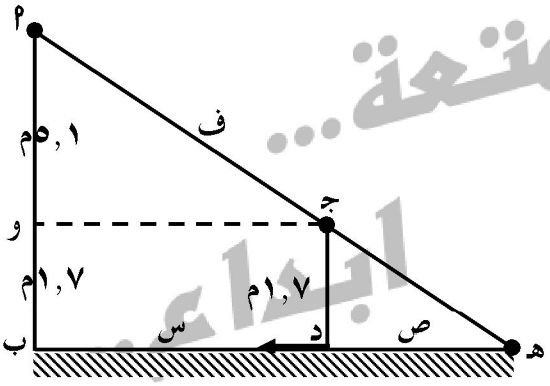
مثـــال:

رجل طوله ١,٧ متر يسير بسرعة ٤ م/دقيقة في خط مستقيم متجها نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٦,٨ متر أوجد:

اولا: معدل تغير طول ظل الرجل.

ثانيا: معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل علي بعد ٦,٨ متر من قاعدة المصباح.

الحـــل:



نفرض ان المصباح هو أ وقاعدة المصباح هى ب

والرجل هو جـد وطول ظل الرجل ص

و بعد الرجل عن قاعدة المصباح س

و بعد رأس الرجل عن المصباح ف

اولا: ايجاد معدل تغير طول ظل الرجل اى $\frac{ءص}{ءن}$

من تشابه المثلثين هـجـد، هـأب

∴ $\frac{ص}{ص + س} = \frac{١٧}{٦٨}$ ⟸ ∴ $\frac{ص}{ص + س} = \frac{١}{٤}$

∴ $٤ص = ص + س$ ⟸ ∴ $٣ص = س$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ $٣\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءس}{ءن}$ بالتعويض عن $\frac{ءس}{ءن} = -٤$ م/دقيقة

∴ $٣\frac{ءص}{ءن} = -٤$ ⟸ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٤}{٣}$ اى أن ظل الرجل يقل بمعدل $\frac{-٤}{٣}$ م/دقيقة

ثانيا: معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح اى $\frac{ءف}{ءن}$

من المثلث أوجـ نجد ان جـو = س ، أو = ٦,٨ − ١,٧ = ٥,١

من نظرية فيثاغورث ∴ $ف^٢ = س^٢ + (٥,١)^٢$

عندما يكون الرجل على بعد ٦,٨ متر من قاعدة المصباح اى ان س = ٦,٨

∴ $ف^٢ = (٦,٨)^٢ + (٥,١)^٢ = ٧٢,٢٥$ ← ∴ $ف = \sqrt{٧٢,٢٥} = ٨,٥$ متر

∵ $ف^٢ = س^٢ + (٥,١)^٢$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore 2\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 2\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ وبالتعويض عن ف = ٨,٥ ، س = ٦,٨ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٤$

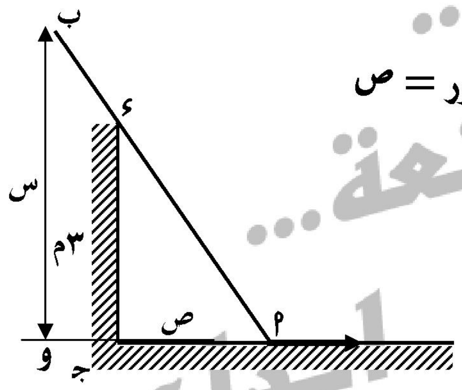
$\therefore ٨,٥ \times \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٦,٨ \times (-٤) \Leftarrow \therefore \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{-٤\times٦٨}{٨٥} = \frac{-١٦}{٥} = -٣,٢$ م/دقيقة

اى أن رأس الرجل تقترب من المصباح بمعدل ٣,٢ م/دقيقة

🕮 مثـــال:

ماسورة مياه طرفاها أ، ب وطولها ٥ أمتار ، تستند بطرفها أ على أرض أفقية وبإحدى نقطها د على سور رأسى إرتفاعه ٣ متر . فإذا إنزلق الطرف أ مبتعدا عن السور بمعدل $\frac{٥}{٤}$ متر/د أوجد معدل هبوط الطـرف ب عندما يصل إلى حافة السور.

✍ الحــــل:



نفرض أن بعد الطرف ب عن الأرض = س وبعد الطرف أ عن السور = ص

من المثلث أجد : $\because (\text{أد})^2 = (\text{أج})^2 + (\text{جد})^2$

$\therefore \text{أد} = \sqrt{\text{ص}^2 + ٩}$

من تشابه المثلثين أجد، أوب $\therefore \frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{جد}}{\text{وب}}$

$\therefore \frac{\sqrt{\text{ص}^2+٩}}{٥} = \frac{٣}{\text{س}}$ $\therefore \text{س}\sqrt{\text{ص}^2+٩} = ١٥$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \sqrt{\text{ص}^2+٩} + \frac{١}{\sqrt{\text{ص}^2+٩}} \times ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠ \leftarrow \therefore (\text{ص}^2+٩)\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$

عندما يصل الطرف ب الى حافة السور

$\therefore$ س = ٣ ، أد = أب = ٥ بالتعويض فى (١) $\therefore \text{ص}^2 + ٩ = ٢٥ \Leftarrow \therefore \text{ص} = ٤$

بالتعويض فى (٢) $\therefore (٤^2 + ٩)\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢ \times ٤ \times \frac{٥}{٤} = ٠$

$\therefore ٢٥\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -١٠ \quad \therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{-١٠}{٢٥} = \frac{-٢}{٥}$

اى أن الطرف ب يهبط بمعدل ١ م / دقيقة

🕮 مثـــال:

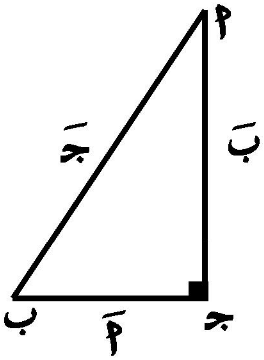
أب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، مساحته ثابتة وتساوى ٢٤ سم^2 ، إذا كان معدل تغير $\overline{\text{ب}}$ يساوى ١سم/ث فأوجد معدل تغير $\overline{\text{أ}}$ ، ق(< أ) عند اللحظة التى يكون فيها $\overline{\text{ب}}$ يساوى ٨ سم

الحـــل:

∵ مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ طول القاعدة × الإرتفاع

∴ م $(\Delta$أبجـ$) = \frac{1}{2}$ أ × ب ، ∵ المساحه ثابتة وتساوى ٢٤ سم²

∴ $\frac{1}{2}$ أ ب $= ٢٤$ ← ∴ أ ب $= ٤٨$ (١) بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن



∴ $\frac{\text{دأ}}{\text{دن}}$ × ب + $\frac{\text{دب}}{\text{دن}}$ × أ = ٠ (٢)

عندما ب = ٨ وبالتعويض فى (١) ∴ أ × ٨ = ٤٨ ← ∴ أ = ٦

وبالتعويض فى (٢) عن ب = ٨ ، أ = ٦ ، $\frac{\text{دب}}{\text{دن}} = ١$

∴ $\frac{\text{دأ}}{\text{دن}}$ × ٨ + ١ × ٦ = ٠ ← ∴ $\frac{\text{دأ}}{\text{دن}} = \frac{-٦}{٨}$ ← ∴ $\frac{\text{دأ}}{\text{دن}} = \frac{-٣}{٤}$

أى أن أ يقل بمعدل $\frac{٣}{٤}$ سم/ث عندما يكون ب يساوى ٨ سم

∵ ظا أ = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ وبتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن ∴ قا² أ × $\frac{\text{دأ}}{\text{دن}} = \frac{\frac{\text{دأ}}{\text{دن}} \times \text{ب} - \frac{\text{دب}}{\text{دن}} \times \text{أ}}{(\text{ب})^2}$

عندما ب = ٨ ، أ = ٦ ∴ جـ = ١٠ ∴ قا أ = $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$

∴ $(\frac{٥}{٤})^2 \times \frac{\text{دأ}}{\text{دن}} = \frac{\frac{-٣}{٤} \times ٨ - ١ \times ٦}{(٨)^2}$ ← ∴ $\frac{٢٥}{١٦} \times \frac{\text{دأ}}{\text{دن}} = \frac{-١٢}{٦٤}$

∴ $\frac{\text{دأ}}{\text{دن}} = \frac{-١٢}{٦٤} \times \frac{١٦}{٢٥}$ ← ∴ $\frac{\text{دأ}}{\text{دن}} = \frac{-٣}{٢٥}$ ء/ث

أى أن ق(∠ أ) يقل بمعدل $\frac{٣}{٢٥}$ ء/ث عندما يكون ب يساوى ٨ سم

مثـــال:

مثلث متساوى الساقين طول قاعدتة ٢٠ $\sqrt{٣}$ ،إذا كان طول كل من ساقية يتناقص بمعدل ٣سم/ساعة فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساويا لطول القاعدة.

الحـــل:

∵ المثلث متساوي الساقين ∴ نفرض أن طول احد الساقين س ، ∵ طول القاعدة $= \text{٢٠}\sqrt{\text{٣}}$

∴ ارتفاع المثلث $= \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - (\text{١٠}\sqrt{\text{٣}})^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣٠٠}}$

∵ مساحة المثلث $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ القاعدة × الارتفاع

∴ $\text{م} = \text{١٠}\sqrt{\text{٣}} \times \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣٠٠}} = \text{١٠}\sqrt{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣٠٠})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{١٠}\sqrt{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣٠٠})^{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}} \times \text{٢س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\text{١٠}\sqrt{\text{٣}}\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣٠٠}}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

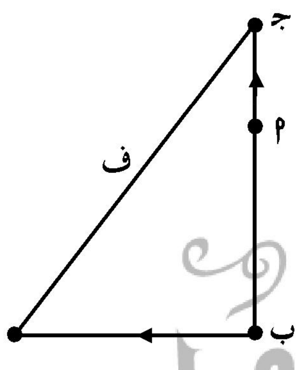
عندما يكون طول كل من الساقين مساويا لطول القاعدة ∴ $\text{س} = \text{٢٠}\sqrt{\text{٣}}$ ، ∵ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\text{٣}$

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\text{١٠}\sqrt{\text{٣}} \times \text{٢٠}\sqrt{\text{٣}}}{\sqrt{(\text{٢٠}\sqrt{\text{٣}})^{\text{٢}} - \text{٣٠٠}}} \times (-\text{٣}) = \frac{\text{٢٠٠} \times \text{٣} \times -\text{٣}}{\text{٣٠}} = -\text{٦٠}$ سم²/ساعة

مثـــال:

يرتفع بالون رأسيا لاعلي بسرعة ثابته مقدارها ١٥ م/ث وعندما كان البالون علي ارتفاع ٩٠ مترا مرت تحتـه مباشرة سيارة وواصلت سيرها في خط مستقيم بسرعة ثابته مقدارها ٢٥ م/ث. أوجـد المعـدل الـذى تـزداد بـه المسافة بين السيارة والبالون بعد ثانيتين من مرور السيارة تحت البالون.

الحـــل:



نفرض أن البالون كان عند أ والسيارة عند ب حيث أب = ٩٠ متر

بعد ن ثانية : يكون البالون وصل الي نقطة جـ حيث أجـ = ١٥ن

وتكون السيارة وصلت الي د حيث بد = ٢٥ن

ويكون البعد بين البالون والسيارة هو ف

من المثلث جـبد ∴ $(\text{جد})^{\text{٢}} = (\text{جب})^{\text{٢}} + (\text{بد})^{\text{٢}}$

∴ $\text{ف}^{\text{٢}} = (\text{١٥ن} + \text{٩٠})^{\text{٢}} + (\text{٢٥ن})^{\text{٢}}$ ← (١) بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ $\text{٢ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{٢}(\text{١٥ن} + \text{٩٠}) \times \text{١٥} + \text{٢}(\text{٢٥ن}) \times \text{٢٥} = \text{١٧٠٠ن} + \text{٢٧٠٠}$ ← (٢)

∴ $\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{٨٥٠ن} + \text{١٣٥٠}$ ← (٢)

عندما ن = ٢ وبالتعويض في (١)

∴ ف^{٢} = (١٥×٢+٩٠)^{٢} + (٢٥×٢)^{٢} = ١٦٩٠٠ ← ∴ ف = ١٣٠

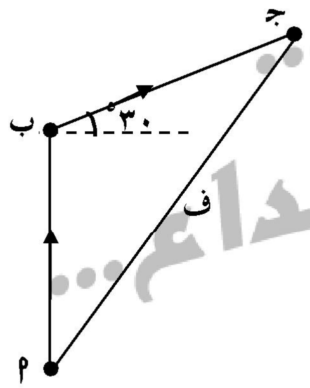
وبالتعويض في (٢) عن ن = ٢ ، ف = ١٣٠

∴ ١٣٠ $\frac{دف}{دن}$ = ٨٥٠×٢+١٣٥٠ = ٣٠٥٠ ⇐ ∴ $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{٣٠٥٠}{١٣٠}$ = $\frac{٣٠٥}{١٣}$ م/ث

مثـــال:

بدأت سفينة الحركة من موقع أ بسرعة منتظمة ١٨ كم/ساعة في اتجاه الشمال وبعد ساعتين سارت في اتجاه يصنع ٣٠° شمال الشرق. اوجد معدل تغير المسافة بين موضع السفينة والموقع أ بعد ٤ ساعات من بدء الحركة.

الحـــل:



السفينة تحركت من نقطة أ لمدة ساعتين في اتجاه الشمال بسرعة ١٨كم/ساعة

فتكون قد وصلت الي نقطة ب حيث أب = ١٨ × ٢ = ٣٦ كم

ثم تحركت في اتجاه ٣٠° شمال الشرق وبعد ن ساعة (من نقطة ب)

تكون السفينة قد وصلت الي نقطة جـ حيث ب جـ = ١٨ ن

ويكون بعدها عن نقطة أ هو أجـ = ف

من المثلث أب جـ وبتطبيق قانون جيب التمام:

∵ (أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} − ٢أب × ب جـ جتا ب

∴ ف^{٢} = ٣٦^{٢} + (١٨ ن)^{٢} − ٢ × ٣٦ × ١٨ ن جتا ١٢٠°

∴ ف^{٢} = ٣٢٤ ن^{٢} + ٦٤٨ ن + ١٢٩٦ ← (١) بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ ٢ف $\frac{دف}{دن}$ = ٦٤٨ ن + ٦٤٨ ⇐ ∴ ف $\frac{دف}{دن}$ = ٣٢٤ ن + ٣٢٤ ← (٢)

بعد ٤ ساعات من بدء الحركة اي بعد ساعتين من نقطة ب ∴ ن = ٢ وبالتعويض في (١)

∴ ف^{٢} = ٣٢٤ × ٢^{٢} + ٦٤٨ × ٢ + ١٢٩٦ = ٣٨٨٨ ⇐ ∴ ف = ٣٦$\sqrt{٣}$

وبالتعويض في (٢) عن ن = ٢، ف = ٣٦$\sqrt{٣}$

∴ ٣٦$\sqrt{٣}$ × $\frac{دف}{دن}$ = ٣٢٤ × ٢ + ٣٢٤ = ٣ × ٣٢٤

∴ $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{٣ × ٣٢٤}{٣٦\sqrt{٣}}$ ⇐ ∴ $\frac{دف}{دن}$ = ٩$\sqrt{٣}$ كم/ساعة